



普通高中教科书

数学

必修

第二册

人民教育出版社

A

7.1 复数的概念

在解决求判别式小于 0 的实系数一元二次方程根的问题时，一个自然的想法是，能否像引进无理数而把有理数集扩充到实数集那样，通过引进新的数而使实数集得到扩充，从而使方程变得可解呢？复数概念的引入与这种想法直接相关.

7.1.1 数系的扩充和复数的概念

从方程的角度看，负实数能不能开平方，就是方程 $x^2 + a = 0$ ($a > 0$) 有没有解，进而可以归结为方程 $x^2 + 1 = 0$ 有没有解.



想一想，这是为什么？



探究

我们知道，方程 $x^2 + 1 = 0$ 在实数集中无解. 联系从自然数集到实数集的扩充过程，你能给出一种方法，适当扩充实数集，使这个方程有解吗？

回顾已有的数集扩充过程，可以看到，每一次扩充都与实际需求密切相关. 例如，为了解决正方形对角线的度量，以及 $x^2 - 2 = 0$ 这样的方程在有理数集中无解的问题，人们把有理数集扩充到了实数集. 数集扩充后，在实数集中规定的加法运算、乘法运算，与原来在有理数集中规定的加法运算、乘法运算协调一致，并且加法和乘法都满足交换律和结合律，乘法对加法满足分配律.

依照这种思想，为了解决 $x^2 + 1 = 0$ 这样的方程在实数系中无解的问题，我们设想引入一个新数 i ，使得 $x = i$ 是方程 $x^2 + 1 = 0$ 的解，即使得 $i^2 = -1$.

i 是数学家欧拉 (Leonhard Euler, 1707—1783) 最早引入的，它取自 imaginary (想象的，假想的) 一词的词头. $i^2 = i \cdot i$.



思考

把新引进的数 i 添加到实数集中，我们希望数 i 和实数之间仍然能像实数那样进行加法和乘法运算，并希望加法和乘法都满足交换律、结合律，以及乘法对加法满足分配律. 那么，实数系经过扩充后，得到的新数系由哪些数组成呢？

依照以上设想,把实数 b 与 i 相乘,结果记作 bi ;把实数 a 与 bi 相加,结果记作 $a+bi$.注意到所有实数以及 i 都可以写成 $a+bi(a, b \in \mathbf{R})$ 的形式,从而这些数都在扩充后的新数集中.

我们把形如 $a+bi(a, b \in \mathbf{R})$ 的数叫做**复数** (complex number),其中 i 叫做**虚数单位** (imaginary unit).全体复数构成的集合 $\mathbf{C}=\{a+bi \mid a, b \in \mathbf{R}\}$ 叫做**复数集** (set of complex numbers).这样,方程 $x^2+1=0$ 在复数集 \mathbf{C} 中就有解 $x=i$ 了.

复数通常用字母 z 表示,即 $z=a+bi(a, b \in \mathbf{R})$.以后不作特殊说明时,复数 $z=a+bi$ 都有 $a, b \in \mathbf{R}$,其中的 a 与 b 分别叫做复数 z 的**实部** (real part) 与**虚部** (imaginary part).

在复数集 $\mathbf{C}=\{a+bi \mid a, b \in \mathbf{R}\}$ 中任取两个数 $a+bi, c+di(a, b, c, d \in \mathbf{R})$,我们规定:

$$a+bi \text{ 与 } c+di \text{ 相等当且仅当 } a=c \text{ 且 } b=d.$$

对于复数 $a+bi(a, b \in \mathbf{R})$,当且仅当 $b=0$ 时,它是实数;当且仅当 $a=b=0$ 时,它是实数 0 ;当 $b \neq 0$ 时,它叫做**虚数** (imaginary number);当 $a=0$ 且 $b \neq 0$ 时,它叫做**纯虚数**.

例如, $3+2i, \frac{1}{2}-\sqrt{3}i, -\sqrt{3}-\frac{1}{2}i, -0.2i$ 都是虚数,它们的实部分别是 $3, \frac{1}{2}, -\sqrt{3}, 0$,虚部分别是 $2, -\sqrt{3}, -\frac{1}{2}, -0.2$,并且其中只有 $-0.2i$ 是纯虚数.

思考

复数集 \mathbf{C} 与实数集 \mathbf{R} 之间有什么关系?

显然,实数集 \mathbf{R} 是复数集 \mathbf{C} 的真子集,即 $\mathbf{R} \subsetneq \mathbf{C}$.

这样,复数 $z=a+bi(a, b \in \mathbf{R})$ 可以分类如下:

复数 $\begin{cases} \text{实数}(b=0), \\ \text{虚数}(b \neq 0) \text{ (当 } a=0 \text{ 时为纯虚数)}. \end{cases}$

复数集、实数集、虚数集、纯虚数集之间的关系,可用图 7.1-1 表示.

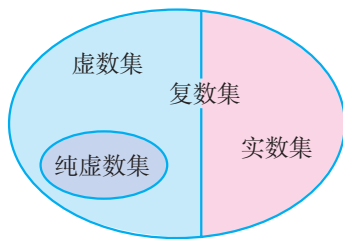


图 7.1-1

例 1 当实数 m 取什么值时,复数 $z=m+1+(m-1)i$ 是下列数?

(1) 实数; (2) 虚数; (3) 纯虚数.

分析: 因为 $m \in \mathbf{R}$,所以 $m+1, m-1$ 都是实数.由复数 $z=a+bi(a, b \in \mathbf{R})$ 是实数、虚数和纯虚数的条件可以确定 m 的取值.

解: (1) 当 $m-1=0$,即 $m=1$ 时,复数 z 是实数.

(2) 当 $m-1 \neq 0$, 即 $m \neq 1$ 时, 复数 z 是虚数.

(3) 当 $m+1=0$, 且 $m-1 \neq 0$, 即 $m=-1$ 时, 复数 z 是纯虚数.

练习

1. 说出下列复数的实部和虚部:

$$-2 + \frac{1}{3}i, \sqrt{2} + i, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{3}i, i, 0.$$

2. 指出下列各数中, 哪些是实数, 哪些是虚数, 哪些是纯虚数. 为什么?

$$2 + \sqrt{7}, 0.618, \frac{2}{7}i, 0, i, 5i + 8, 3 - 9\sqrt{2}i, i(1 - \sqrt{3}), \sqrt{2} - \sqrt{2}i.$$

3. 求满足下列条件的实数 x, y 的值:

$$(1) (x+y) + (y-1)i = (2x+3y) + (2y+1)i; \quad (2) (x+y-3) + (x-2)i = 0.$$