

1.3 空间向量及其运算的坐标表示

学习了空间向量基本定理，建立了“空间基底”的概念，我们就可以利用基底表示任意一个空间向量，进而把空间向量的运算转化为基向量的运算。所以，基底概念的引入为几何问题代数化奠定了基础。

在平面向量中，我们以平面直角坐标系中与 x 轴、 y 轴方向相同的两个单位向量 i, j 为基底，建立了向量的坐标与点的坐标的一一对应关系，从而把平面向量的运算化归为数的运算。类似地，为了把空间向量的运算化归为数的运算，能否利用空间向量基本定理和空间的单位正交基底，建立空间直角坐标系，进而建立空间向量的坐标与空间点的坐标的一一对应呢？下面我们就来研究这个问题。

1.3.1 空间直角坐标系

我们知道，平面直角坐标系由平面内两条互相垂直、原点重合的数轴组成。利用单位正交基底概念，我们还可以这样理解平面直角坐标系：如图 1.3-1，在平面内选定一点 O 和一个单位正交基底 $\{i, j\}$ ，以 O 为原点，分别以 i, j 的方向为正方向、以它们的长为单位长度建立两条数轴： x 轴、 y 轴，那么我们就建立了一个平面直角坐标系。

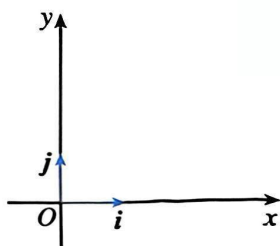


图 1.3-1

类似地，在空间选定一点 O 和一个单位正交基底 $\{i, j, k\}$ (图 1.3-2)。以点 O 为原点，分别以 i, j, k 的方向为正方向、以它们的长为单位长度建立三条数轴： x 轴、 y 轴、 z 轴，它们都叫做坐标轴。这时我们就建立了一个空间直角坐标系 $Oxyz$ ， O 叫做原点， i, j, k 都叫做坐标向量，通过每两条坐标轴的平面叫做坐标平面，分别称为 Oxy 平面， Oyz 平面， Ozx 平面，它们把空间分成八个部分。

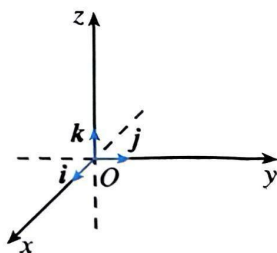


图 1.3-2

画空间直角坐标系 $Oxyz$ 时，一般使 $\angle xOy = 135^\circ$ (或 45°)， $\angle yOz = 90^\circ$ 。

在空间直角坐标系中，让右手拇指指向 x 轴的正方向，食指

指向 y 轴的正方向, 如果中指指向 z 轴的正方向, 则称这个坐标系为**右手直角坐标系**. 本书建立的坐标系都是右手直角坐标系.

探究

在平面直角坐标系中, 每一个点和向量都可用一对有序实数 (即它的坐标) 表示. 对空间直角坐标系中的每一个点和向量, 是否也有类似的表示呢?

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中 (图 1.3-3), i, j, k 为坐标向量, 对空间任意一点 A , 对应一个向量 \overrightarrow{OA} , 且点 A 的位置由向量 \overrightarrow{OA} 唯一确定, 由空间向量基本定理, 存在唯一的有序实数组 (x, y, z) , 使

$$\overrightarrow{OA} = xi + yj + zk.$$

在单位正交基底 $\{i, j, k\}$ 下与向量 \overrightarrow{OA} 对应的有序实数组 (x, y, z) , 叫做点 A 在空间直角坐标系中的坐标, 记作 $A(x, y, z)$, 其中 x 叫做点 A 的**横坐标**, y 叫做点 A 的**纵坐标**, z 叫做点 A 的**竖坐标**.

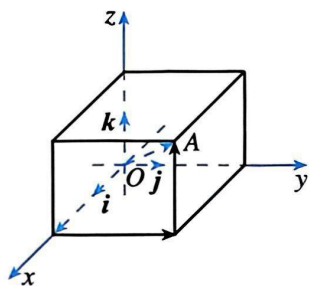


图 1.3-3

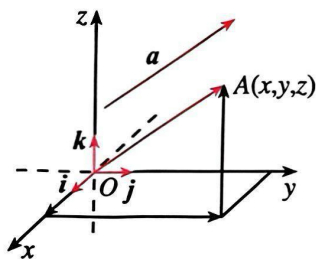


图 1.3-4

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中, 给定向量 a , 作 $\overrightarrow{OA} = a$ (图 1.3-4). 由空间向量基本定理, 存在唯一的有序实数组 (x, y, z) , 使

$$a = xi + yj + zk.$$

有序实数组 (x, y, z) 叫做 a 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标, 上式可简记作

$$a = (x, y, z).$$

这样, 在空间直角坐标系中, 空间中的点和向量都可以用三个有序实数表示.

符号 (x, y, z) 具有双重意义, 它既可以表示向量, 也可以表示点, 在表述时要注意区分.

探究

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中, 对空间任意一点 A , 或任意一个向量 \overrightarrow{OA} , 你能借助几何直观确定它们的坐标 (x, y, z) 吗?

事实上,如图 1.3-5,过点 A 分别作垂直于 x 轴、 y 轴和 z 轴的平面,依次交 x 轴、 y 轴和 z 轴于点 B , C 和 D . 可以证明 \overrightarrow{OA} 在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的投影向量分别为 \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OC} , \overrightarrow{OD} , 且 $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$. 设点 B , C 和 D 在 x 轴、 y 轴和 z 轴上的坐标分别是 x , y 和 z , 那么点 A (向量 \overrightarrow{OA}) 的坐标为 (x, y, z) .

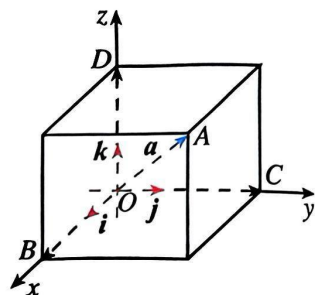


图 1.3-5

例 1 如图 1.3-6, 在长方体 $OABC-D'A'B'C'$ 中, $OA=3$, $OC=4$, $OD'=2$, 以 $\{\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}, \frac{1}{4}\overrightarrow{OC}, \frac{1}{2}\overrightarrow{OD'}\}$ 为单位正交基底, 建立如图所示的空间直角坐标系 $Oxyz$.

- (1) 写出 D' , C , A' , B' 四点的坐标;
- (2) 写出向量 $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{B'B}$, $\overrightarrow{A'C'}$, $\overrightarrow{AC'}$ 的坐标.

解: (1) 点 D' 在 z 轴上, 且 $OD'=2$, 所以 $\overrightarrow{OD'}=0\mathbf{i}+0\mathbf{j}+2\mathbf{k}$. 所以点 D' 的坐标是 $(0, 0, 2)$.

同理, 点 C 的坐标是 $(0, 4, 0)$.

点 A' 在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的射影分别为 A , O , D' , 它们在坐标轴上的坐标分别为 $3, 0, 2$, 所以点 A' 的坐标是 $(3, 0, 2)$.

点 B' 在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的射影分别为 A , C , D' , 它们在坐标轴上的坐标分别为 $3, 4, 2$, 所以点 B' 的坐标是 $(3, 4, 2)$.

$$\begin{aligned} (2) \quad \overrightarrow{A'B'} &= \overrightarrow{OC} = 0\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = (0, 4, 0); \\ \overrightarrow{B'B} &= -\overrightarrow{OD'} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 2\mathbf{k} = (0, 0, -2); \\ \overrightarrow{A'C'} &= \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{D'C'} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = (-3, 4, 0); \\ \overrightarrow{AC'} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CC'} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k} = (-3, 4, 2). \end{aligned}$$

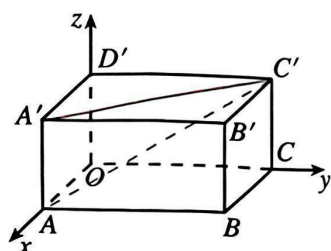


图 1.3-6

练习

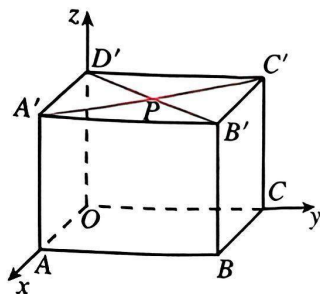
1. 在空间直角坐标系中标出下列各点:

$$A(0, 2, 4), B(1, 0, 5), C(0, 2, 0), D(1, 3, 4).$$

2. 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中,

- (1) 哪个坐标平面与 x 轴垂直? 哪个坐标平面与 y 轴垂直? 哪个坐标平面与 z 轴垂直?
- (2) 写出点 $P(2, 3, 4)$ 在三个坐标平面内的射影的坐标.
- (3) 写出点 $P(1, 3, 5)$ 关于原点成中心对称的点的坐标.

3. 在长方体 $OABC-D'A'B'C'$ 中, $OA=3$, $OC=4$, $OD'=3$, $A'C'$ 与 $B'D'$ 相交于点 P , 建立如图所示的空间直角坐标系 $Oxyz$.



(第 3 题)

(1) 写出点 C, B', P 的坐标;

(2) 写出向量 $\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{A'C'}$ 的坐标.

4. 已知点 B 是点 $A(3, 4, 5)$ 在坐标平面 Oxy 内的射影, 求 $|\overrightarrow{OB}|$.