

3.3.2 抛物线的简单几何性质

② 思考

类比用方程研究椭圆、双曲线几何性质的过程与方法,你认为应研究抛物线

$$y^2=2px \quad (p>0) \quad ①$$

的哪些几何性质?如何研究这些性质?

1. 范围

因为 $p>0$, 由方程①可知, 对于抛物线上的点 $M(x, y)$, $x \geq 0$, $y \in \mathbf{R}$, 当 $x>0$ 时, 抛物线在 y 轴的右侧, 开口方向与 x 轴的正方向相同; 当 x 的值增大时, $|y|$ 的值也增大, 这说明抛物线向右上方和右下方无限延伸.

2. 对称性

以 $-y$ 代 y , 方程①不变, 所以抛物线关于 x 轴对称. 我们把抛物线的对称轴叫做**抛物线的轴**.

3. 顶点

抛物线和它的轴的交点叫做**抛物线的顶点**. 在方程①中, 当 $y=0$ 时, $x=0$, 因此抛物线的顶点就是原点.

4. 离心率

抛物线上的点 M 与焦点 F 的距离和点 M 到准线的距离 d 的比 $\frac{|MF|}{d}$, 叫做**抛物线的离心率**, 用 e 表示. 由抛物线的定义可知, $e=1$.

例 3 已知抛物线关于 x 轴对称, 它的顶点在原点, 并且经过点 $M(2, -2\sqrt{2})$, 求它的标准方程.

解: 因为抛物线关于 x 轴对称, 它的顶点在原点, 并且经过点 $M(2, -2\sqrt{2})$, 所以可设它的标准方程为

$$y^2=2px \quad (p>0).$$

因为点 M 在抛物线上, 所以

$$(-2\sqrt{2})^2=2p \times 2,$$

解得 $p=2$.

因此, 所求抛物线的标准方程是

$$y^2=4x.$$

思考

顶点在原点，对称轴是坐标轴，并且经过点 $M(2, -2\sqrt{2})$ 的抛物线有几条？求出这些抛物线的标准方程。

例4 斜率为1的直线 l 经过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F ，且与抛物线相交于 A, B 两点，求线段 AB 的长。

分析：由抛物线的方程可以得到它的焦点坐标，又直线 l 的斜率为1，所以可以求出直线 l 的方程；与抛物线的方程联立，可以求出 A, B 两点的坐标；利用两点间的距离公式可以求出 $|AB|$ 。这种方法思路直接，具有一般性。请你用此方法求 $|AB|$ 。

下面介绍另外一种方法——数形结合的方法。

在图 3.3-4 中，设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 。由抛物线的定义可知， $|AF|$ 等于点 A 到准线的距离 $|AA'|$ 。由 $p=2, \frac{p}{2}=1$ ，得 $|AA'|=x_1+\frac{p}{2}=x_1+1$ ，于是 $|AF|=x_1+1$ 。同理， $|BF|=|BB'|=x_2+\frac{p}{2}=x_2+1$ ，于是得

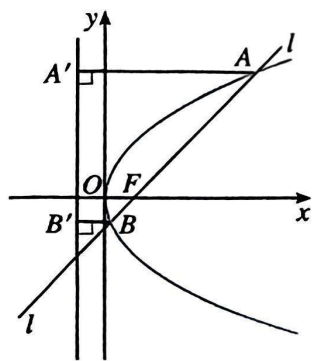


图 3.3-4

$$|AB|=|AF|+|BF|=x_1+x_2+p=x_1+x_2+2.$$

由此可见，只要求出点 A, B 的横坐标之和 x_1+x_2 ，就可以求出 $|AB|$ 。

解：由题意可知， $p=2, \frac{p}{2}=1$ ，焦点 F 的坐标为 $(1, 0)$ ，准线方程为 $x=-1$ 。如图 3.3-4，设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ， A, B 两点到准线的距离分别为 d_A, d_B 。由抛物线的定义，可知

$$|AF|=d_A=x_1+1, |BF|=d_B=x_2+1,$$

于是

$$|AB|=|AF|+|BF|=x_1+x_2+2.$$

因为直线 l 的斜率为1，且过焦点 $F(1, 0)$ ，所以直线 l 的方程为

$$y=x-1. \quad \text{①}$$

将①代入方程 $y^2=4x$ ，得 $(x-1)^2=4x$ ，化简，得

$$x^2-6x+1=0.$$

所以

$$x_1+x_2=6,$$

$$|AB|=x_1+x_2+2=8.$$

所以，线段 AB 的长是8。

?

如果直线 l 不经过焦点 F ， $|AB|$ 还等于 x_1+x_2+2 吗？

练习

1. 求适合下列条件的抛物线的标准方程：

- (1) 关于 x 轴对称，并且经过点 $M(5, -4)$ ；
- (2) 关于 y 轴对称，准线经过点 $E(5, -5)$ ；
- (3) 准线在 y 轴的右侧，顶点到准线的距离是 4；
- (4) 焦点 F 在 y 轴负半轴上，经过横坐标为 16 的点 P ，且 FP 平行于准线.

2. 在同一坐标系中画出下列抛物线，观察它们开口的大小，并说明抛物线开口大小与方程中 x 的系数的关系：

(1) $y^2 = \frac{1}{2}x$; (2) $y^2 = x$; (3) $y^2 = 2x$; (4) $y^2 = 4x$.

3. 过点 $M(2, 0)$ 作斜率为 1 的直线 l ，交抛物线 $y^2 = 4x$ 于 A, B 两点，求 $|AB|$ 。

4. 垂直于 x 轴的直线交抛物线 $y^2 = 4x$ 于 A, B 两点，且 $|AB| = 4\sqrt{3}$ ，求直线 AB 的方程。