

2.2 直线的方程

我们知道, 给定一点和一个方向可以唯一确定一条直线. 这样, 在平面直角坐标系中, 给定一个点 $P_0(x_0, y_0)$ 和斜率 k (或倾斜角), 就能唯一确定一条直线. 也就是说, 这条直线上任意一点的坐标 (x, y) 与点 P_0 的坐标 (x_0, y_0) 和斜率 k 之间的关系是完全确定的. 那么, 这一关系如何表示呢? 下面我们就来研究这个问题.

2.2.1 直线的点斜式方程

如图 2.2-1, 直线 l 经过点 $P_0(x_0, y_0)$, 且斜率为 k . 设 $P(x, y)$ 是直线 l 上不同于点 P_0 的任意一点, 因为直线 l 的斜率为 k , 由斜率公式得

$$k = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

即

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

由上述推导过程可知:

(1) 直线 l 上每一个点的坐标 (x, y) 都满足关系式 $y - y_0 = k(x - x_0)$; 反过来, 我们还可以验证

(2) 坐标满足关系式 $y - y_0 = k(x - x_0)$ 的每一个点都在直线 l 上.

事实上, 若点 $P_1(x_1, y_1)$ 的坐标 x_1, y_1 满足关系式 $y - y_0 = k(x - x_0)$, 则

$$y_1 - y_0 = k(x_1 - x_0).$$

当 $x_1 = x_0$ 时, $y_1 = y_0$, 这时点 P_1 与 P_0 重合, 显然有点 P_1 在直线 l 上;

当 $x_1 \neq x_0$ 时, 有 $k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, 这表明过点 P_1, P_0 的直线 l_1 的斜率为 k . 因为直线 l, l_1 的斜率都为 k , 且都过

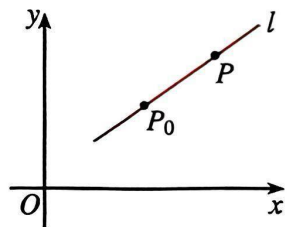


图 2.2-1

点 P_0 的坐标 (x_0, y_0) 满足关系式 $y - y_0 = k(x - x_0)$ 吗?

建立直线的方程, 就是利用确定直线位置的几何要素, 建立直线上任意一点的横坐标 x , 纵坐标 y 所满足的关系式.

点 P_0 , 所以它们重合. 所以, 点 P_1 在直线 l 上.

由 (1) (2) 可得: 坐标满足关系式 $y-y_0=k(x-x_0)$ 的点一定在直线 l 上; 直线 l 上任意一点的坐标一定满足关系式 $y-y_0=k(x-x_0)$. 我们把方程

$$y-y_0=k(x-x_0)$$

称为过点 $P_0(x_0, y_0)$, 斜率为 k 的直线 l 的方程.

方程 $y-y_0=k(x-x_0)$ 由直线上一个定点 (x_0, y_0) 及该直线的斜率 k 确定, 我们把它叫做直线的点斜式方程, 简称点斜式 (point slope form).

思考

- (1) 当直线 l 的倾斜角为 0° 时, 直线 l 的方程是什么? 为什么?
- (2) 当直线 l 的倾斜角为 90° 时, 直线 l 的方程如何表示? 为什么?

当直线 l 的倾斜角为 0° 时 (图 2.2-2), $\tan 0^\circ=0$, 即 $k=0$, 这时直线 l 与 x 轴平行或重合, 直线 l 的方程是

$$y-y_0=0, \text{ 即 } y=y_0.$$

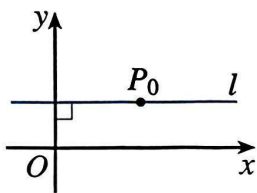


图 2.2-2

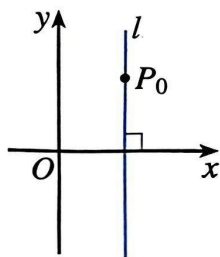


图 2.2-3

当直线 l 的倾斜角为 90° 时 (图 2.2-3), 由于 $\tan 90^\circ$ 无意义, 直线没有斜率, 这时直线 l 与 y 轴平行或重合, 它的方程不能用点斜式表示. 又因为这时直线 l 上每一点的横坐标都等于 x_0 , 所以它的方程是

$$x-x_0=0, \text{ 即 } x=x_0.$$

例 1 直线 l 经过点 $P_0(-2, 3)$, 且倾斜角 $\alpha=45^\circ$, 求直线 l 的点斜式方程, 并画出直线 l .

解: 直线 l 经过点 $P_0(-2, 3)$, 斜率 $k=\tan 45^\circ=1$, 代入点斜式方程得

$$y-3=x+2.$$

画图时, 只需再找出直线 l 上的另一点 $P_1(x_1, y_1)$, 例如, 取 $x_1=-1$, 则 $y_1=4$, 得点 P_1 的坐标为 $(-1, 4)$, 过 P_0, P_1 两点的直线即为所求, 如图 2.2-4 所示.

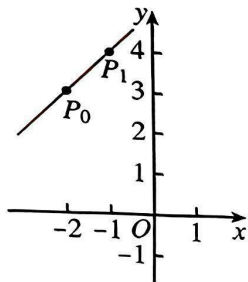


图 2.2-4

下面我们看点斜式的一种特殊情形：如果斜率为 k 的直线 l 过点 $P_0(0, b)$ ，这时 P_0 是直线 l 与 y 轴的交点，代入直线的点斜式方程，得

$$y - b = k(x - 0),$$

即

$$y = kx + b.$$

我们把直线 l 与 y 轴的交点 $(0, b)$ 的纵坐标 b 叫做直线 l 在 y 轴上的**截距** (intercept). 这样，方程 $y = kx + b$ 由直线的斜率 k 与它在 y 轴上的截距 b 确定，我们把方程 $y = kx + b$ 叫做直线的**斜截式方程**，简称**斜截式** (slope intercept form). 其中， k 和 b 均有明显的几何意义： k 是直线的斜率， b 是直线在 y 轴上的截距.

?

截距是距离吗?

思考

方程 $y = kx + b$ 与我们学过的一次函数表达式类似. 我们知道，一次函数的图象是一条直线，你如何从直线方程的角度认识一次函数 $y = kx + b$ ？你能说出一次函数 $y = 2x - 1$ ， $y = 3x$ 及 $y = -x + 3$ 图象的特点吗？

例 2 已知直线 $l_1: y = k_1x + b_1$ ， $l_2: y = k_2x + b_2$ ，试讨论：(1) $l_1 // l_2$ 的条件是什么？(2) $l_1 \perp l_2$ 的条件是什么？

分析：回顾前面用斜率判断两条直线平行、垂直的结论，可以发现 $l_1 // l_2$ 或 $l_1 \perp l_2$ 时， k_1, k_2 与 b_1, b_2 应满足的关系.

解：(1) 若 $l_1 // l_2$ ，则 $k_1 = k_2$ ，此时 l_1, l_2 与 y 轴的交点不同，即 $b_1 \neq b_2$ ；反之，若 $k_1 = k_2$ ，且 $b_1 \neq b_2$ ，则 $l_1 // l_2$.

(2) 若 $l_1 \perp l_2$ ，则 $k_1 k_2 = -1$ ；反之，若 $k_1 k_2 = -1$ ，则 $l_1 \perp l_2$.

由例 2 我们得到，对于直线 $l_1: y = k_1x + b_1$ ， $l_2: y = k_2x + b_2$ ，

$$l_1 // l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2, \text{ 且 } b_1 \neq b_2;$$

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1.$$

练习

1. 写出下列直线的点斜式方程：

- (1) 经过点 $A(3, -1)$ ，斜率是 $\sqrt{2}$ ；
- (2) 经过点 $B(-\sqrt{2}, 2)$ ，倾斜角是 30° ；
- (3) 经过点 $C(0, 3)$ ，倾斜角是 0° ；

(4) 经过点 $D(-4, -2)$, 倾斜角是 $\frac{2\pi}{3}$.

2. 填空题.

(1) 已知直线的点斜式方程是 $y-2=x-1$, 那么此直线的斜率是____, 倾斜角是____;

(2) 已知直线的点斜式方程是 $y+2=\sqrt{3}(x+1)$, 那么此直线的斜率是____, 倾斜角是____.

3. 写出下列直线的斜截式方程:

(1) 斜率是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 在 y 轴上的截距是 -2 ;

(2) 斜率是 -2 , 在 y 轴上的截距是 4 .

4. 判断下列各对直线是否平行或垂直:

(1) $l_1: y=\frac{1}{2}x+3$, $l_2: y=\frac{1}{2}x-2$; (2) $l_1: y=\frac{5}{3}x$, $l_2: y=-\frac{3}{5}x$.